BIOLÓGIAI JELEK SZÁMÍTÓGÉPES ELEMZÉSE

Tanulmány

Détári László, 1983

Az élő szervezet működése közben keletkező elektromos jelek megfelelő elektródokkal erősítőrendszerekkel és kiíró berendezésekkel viszonylag könnyen észlelhetők és regisztrálhatók. Spontán, illetve külső behatásra létrejövő változásaikból igen sok következtetés vonható le a működésekre nézve. A biológiai eredetű elektromos jelek közül alapvető jelentőségű a központi idegrendszer diagnosztikai és kutatási célú vizsgálatában az elektroenkefalográfiás (EEG) görbék elemzése. Bár a görbék szabad szemmel való átnézése is igen sok információt szolgáltat a szakember számára, az EEG jelek számítógépes analízisének létjogosultságát legalább 3 érv támasztja alá:

1. Segítségével olyan jellemzők is vizsgálhatók, amelyek pusztán megtekintéssel nem észlelhetők.

2. A szabad szemmel is látható sajátságok kvantifikálhatók és így összehasonlíthatóvá válnak.

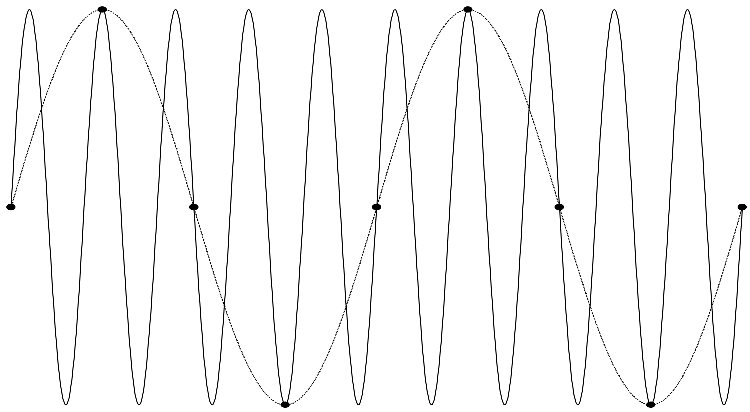
3. A különösebb szakértelmet nem igénylő rutin elemzések egy részében az emberi munka helyettesíthető ily módon.

Az EEG jelek számítógépes analízise napjainkban igen elterjedtté vált, mind a klinikumban, mind a kutató munkában. Ezt az elérhető áron komoly teljesítményt nyújtó számítógépek megjelenése tette lehetővé. Igen sok matematikai módszert és eljárást dolgoztak ki szerte a világon, ezek közül az alábbiakban elsősorban azok fognak szerepelni, amelyek a MOD 81-re kifejlesztett CLSP programnyelv segítségével megvalósíthatók. Az analízis alapelvei és legtöbbször végrehajtásának módjai is a hasonló jellegű, más forrásból származó biológiai jelekre, légzésgörbe, bőrellenállás változás stb., ugyanúgy alkalmazhatók.

1.Mintavételezés

Az EEG görbe időben folyamatosan változó feszültségű elektromos jel. Számítógépes feldolgozásának alapfeltétele, hogy az eredeti analóg jelet számsorozattá, vagyis digitális jellé alakítsuk. Ezt alkalmas berendezéssel, az analóg-digitális (A/D) konverterrel végezzük, amely egymástól azonos távolságra levő mintavételi időpontokban megméri az EEG jel amplitúdóját, és a feszültségértéket digitális formában, vagyis számként továbbítja a számítógép felé. Az A/D konverter bemenő jelének bizonyos feszültségértékek között (pl. ±1 V) kell lennie. A görbealak megfelelő felbontásához 8-12 bit-es eredményt szolgáltató átalakító szükséges. Például 10 bit ±512 feszültségszintet jelent, ami kb. 0,1 százalékos mérési pontosságnak felel meg. (Ez ±1 V-os jel esetén 1 mV). A maximális pontosság természetesen csak akkor érhető el, ha a görbe jól kitölti a rendelkezésre álló ±1 V-os feszültségtartományt. Magasabb bitszámmal jobb felbontás érhető el, de az egyrészt növeli a koverziós időt, másrészt felesleges is, mivel nincs értelme túllépni az egész mérőrendszer pontosságát. Az átalakítás ideje általában 10-50 μsec közé esik. Ezalatt az idő alatt egy tartó áramkör (sample-and-hold) rögzíti a mérési parancs beérkezésekor fennálló feszültségértéket. Ennek különösen gyorsan változó jelek (pl. EMG) esetén van jelentősége. Az esetek többségében párhuzamosan több biológiai jelet (pl. különböző EEG elvezetések) regisztrálunk, és ezeket egyszerre akarjuk analizálni is. Mivel több A/D átalakító beállítása meglehetősen költséges, ilyenkor a vizsgálandó jeleket sorban egymásután kapcsoljuk az A/D átalakító bemenetére egy multiplexer segítségével. Fontos azonban ilyenkor figyelembe venni, hogy tekintettel a konverziós időre, az egyes jelek mintavételezése nem egyidőben történik. Például 8 bemenő jel és 50 usec-es konverziós idő esetén az első és az utolsó jel között 7 ∗ 50 μsec = 350 μsec fáziseltolódás jelentkezik.

Az A/D átalakító bit-felbontása és konverziós ideje nem változtatható adottság. Általában azonban a felhasználóra van bízva a mintavételi idő megválasztása. A legfontosabb szabály, hogy a mintavételnek a jelben előforduló legnagyobb frekvencia kétszeresével kell történnie. Ennél ritkábban vett minták esetén nem egyszerűen lemaradnak a görbe magasabb frekvenciájú összetevői, hanem alacsonyabb frekvenciák formájában jelentkeznek. Ebből származik a hibalehetőség szakirodalomban elterjedt angol elenevezése: "aliasing". Ez arra utal, hogy a nagyobb frekvenciák "álnéven" (alias), rejtve jelennek meg (1. ábra)



1. Ábra

A szokványos EEG regisztrátum nem tartalmaz 50 Hz feletti frekvenciakomponenseket, ezért a 100 Hz-el történő mintavételezés (mintavételi idő 10 msec) általában kielégítő. Abban az esetben azonban, ha hosszabb szakaszt akarunk vizsgálni, és ezért ritkább mintavételt alkalmazunk, feltétlenül szükséges az EEG görbe előzetes szűrése megfelelő aluláteresztő szűrővel, mert később semmiképpen sem lehet a hibát korrigálni.

A számítógépes analízis módszereinek leírásánál a továbbiakban a következő főbb jelölések fognak szerepelni:

$x(t)$, $y(t)$ - a vizsgált, időben változó biológiai jel (pl. EEG)

x_i, y_i - a jel i-ik mintavételi időpontban mért amplitúdója, ahol $i = 1,2.....N$

T -a vizsgált szakasz időtartama

N -a mintavételek száma

$\Delta t=T/N$ - két mintavétel között eltelő idő

$f_m=1/\Delta t$ -a mintavétel frekvenciája

$f_n=1/2\Delta t$ -az EEG görbében előforduló legmagasabb frekvenciakomponens (Nyquist frekvencia, a mintavételi frekvencia és a jel frekvencia-összetevői között megkövetelt összefüggés leirója után)

2. Az EEG jellemzése statisztikai szempontból

A mintavételezés megfelelő végrehajtása után rendelkezésünkre áll az eredeti jelet jól közelítő számsorozat, amely már alkalmas digitális számítógépen való feldolgozásra. Tekintettel arra, hogy az EEG jel nem determinisztikus jellegű, vagyis nem írható le explicit matematikai kifejezés formájában, csak statisztikai módszerekkel jellemezhető. A mintavételezett szakaszt, illetve az annak megfelelő számsorozatot egy véletlen folyamat által létrehozható végtelen sok minta egyikének tekintjük. Ha feltételezzük, hogy a folyamat statisztikai jellemzői időben állandóak (ergodikus folyamat), akkor a mintából az egész folyamatra, vagyis az összes lehetséges mintára nézve vonhatunk le következtetéseket. Ez a feltétel általában csak korlátozottan érvényesül, hiszen például a magatartási állapotokkal párhuzamosan az EEG jellege is változik. Az egyes állapotokkal külön-külön foglalkozva azonban már elfogadhatjuk a feltétel érvényességét. A minta statisztikai elemzése azonban további problémákat is felvet. A benne szereplő elemek, amplitúdó értékek, egymástól nem függetlenek, és általában nem normális eloszlást mutatnak. Ha egy valószínűségi változó értékei egymástól függetlenek és normális eloszlásúak, akkor jellemzésükre elegendő az átlagérték és a szórás. Nem normális eloszlás esetén magasabb rendű momentumok is szükségesek. Ha a függetlenség feltétele sem teljesül, akkor a függőség leírására még az autokovariancia függvényt, vagy az ezzel egyenértékű teljesítmény spektrumot is meg kell adni. Ezek alkalmazhatóságának alapfeltétele a stacionaritás, vagyis, hogy két érték közötti kapcsolat csak az időbeli távolságtól függjön, és időben nem változzék.

További bonyodalmat jelent, hogy általában egyidejűleg több jelet regisztrálunk, és amellett, hogy ezeket külön-külön szeretnénk statisztikai szempontból jellemezni, kíváncsiak vagyunk a közöttük esetleg fennálló kapcsolatra is.

3. Az amplitúdók analízise

Az EEG jelből vett minta amplitúdó értékeiből gyakorisági eloszlást (hisztogram) rajzolhatunk, amely a valószínűségi sűrűség függvényt közelíti. Ez minden információt tartalmaz az eloszlásról, azonban nehezen kezelhető, és nehezen hasonlítható össze más minták hisztogramjaival. Gyakoribb ezért a belőle származtatható mérőszámok alkalmazása. Tekintettel arra, hogy az ampitudó eloszlás általában nem követi a normális eloszlást, jellemzésére az átlag és szórás mellett a magasabbrendű centrális momentumok, illetve az azokból származtatott mennyiségek használatosak.

1. momemtum várható érték

$$m_1 = \overline{x} = M[x]$$

ahol x a valószínűségi változót jelenti, M[ ] pedig a zárójelben lévő kifejezés várható értékét

Becslése a mintából az átlagérték kiszámításával történik. Mivel az EEG jelek regisztrálásakor általában kiszűrik az egyenáramú komponenseket a minta várható értéke 0. Kényelmi és elméleti megfontolásokból egyaránt célszerű valamennyi analitikai módszer alkalmazása előtt a minta középértékeket az átlag levonásával 0-ra állítani.

2. centrális momentum variancia, vagy szórásnégyzet

$$m_2 = D_x^{\,2} = M\left[\left(x - \overline{x}\right)^2\right]$$

Ha a vizsgált minta középértéke 0, akkor az átlagos intenzitás becslését adja meg. A középértékkel együtt a szórást alkalmazzák leggyakrabban eloszlások jellemzésére, de mint arról szó volt csak normális eloszlás esetén képesek azt maradéktalanul leírni.

3. centrális momentum

$$m_3 = M\left[(x-\overline{x})^3\right]$$

Önmagában kevésbé használatos, de mivel a 3. hatvány miatt érzékeny az átlagból való eltérés előjelére is, belőle származtatják az eloszlás ferdeségét (skewness) jellemző mutatót.

$$b_1 = \frac{m_3}{(m_2)^{\frac{3}{2}}}$$

4. centrális momentum

$$m_4 = M\left[(x-\overline{x})^4\right]$$

Akárcsak a 3. centrális momentum esetében, itt is inkább az ebből számolható mennyiséget a csúcsosságot (curtosis) használják.

$$b_2 = \frac{m_4}{(m_2)^2}$$

Ez az érték arra utal, hogy mennyire tömörödnek a középérték körül a valószínűségi változó értékei. Mivel az eloszlásokat gyakran viszonyítják a normális eloszlás haranggörbéjéhez, amelyre nézve $b_2 = 3$, szokásos a "többlet" (excess) megadása is.

$$többlet = b_2 - 3$$

4. Autokovariancia és autokorreláció

Mint arról az EEG görbe általános jellemzésénél szó volt, a görbe egyes pontjaiban mért amplitúdóértékek nem függetlenek egymástól. Függőségüket jól jellemzi az autokovariancia és autokorreláció függvény. Ezek a valószínűségi változók közötti kapcsolat leírására szolgáló kovariancia és korrelációs együttható fogalom kiterjesztésével definiálhatók. A kovariancia azt mutatja meg, hogy két valószínűségi változó összetartozó értékei mennyire hajlamosak azonos irányban, vagy éppen ellentétes irányban eltérni a várható értéktől.

$$C = M\left[\left(x-\overline{x}\right)*\left(y-\overline{y}\right)\right]$$

Ha a két különbség nagy valószínűséggel azonos előjelű, akkor C értéke nagy pozitív, ha ellentétes előjelű, akkor nagy negatív szám lesz. Véletlenszerűen alakuló előjelek esetén pedig alacsony értéket kapunk. A kovariancia nagysága függ a valószínűségi változók várható értékétől is ezért helyette inkább a korrelációs együtthatót szokás alkalmazni. Ezt a szórások szorzatával való normalizálás után kapjuk.

$$r = \frac{C}{D_x * D_y}$$

Kimutatható, hogy a kovariancia értéke legfeljebb a szórások szorzatát érheti el, így r értéke -1 és $+1$ között változhat. A korrelációs együttható 0-hoz közeli értékei a kapcsolat hiányára, +1, illetve -1 közelébe eső értékei pedig erős egyenes, illetve fordított kapcsolatra utalnak.

A két valószínűségi változó helyére ugyanannak a változónak bizonyos időeltolódással mért értékeit írva, az időeltolódás függvényében megrajzolhatjuk az autokovariancia függvényt. Ennek 0 pontjában a változó varianciája, szórásnégyzete található. A varianciával való normalizálás az autokorrelációs függvényt eredményezi, amelynek értéke a 0 pontban 1, másutt pedig ennél kisebb, -1 és +1 közötti érték. Mindkét függvény a 0 körül szimmetrikus, hiszen a függőség csak a két vizsgált pont időbeli távolságától függ. Adott, τ időeltolódásnál mutatkozó csúcs jelentése: ha egy vizsgált pontban megfigyelünk valamilyen amplitúdóértéket, akkor a pont előtt és után τ-val nagy valószínűséggel hasonló érték található. A függvény minimuma viszont éppen ellentett értékek felbukkanását valószínűsíti. Az autokovariancia függvény definiciója:

$$c(\tau) = c(-\tau) = M[x(t) * x(t+\tau)]$$
$$ahol\ \tau\ az\ idöeltolás\ és\quad \bar{x} = 0$$

Mivel a jel amplitúdóját csak diszkrét mintavételi időpontokban figyeljük meg, az autokovariancia és autokorrelációs függvény szintén diszkrét értékekből áll, az időeltolás csak a két mintavétel között eltelő idő egészszámú többszöröse lehet. Tekintettel arra, hogy minél nagyobb az eltolás, annál kevesebb pontból kényszerülünk becsülni az autokovariancia értékét (szélső esetben, ha $\tau = (N\text{-}1) * \Delta t$, egyetlen pontból), a maximális eltolást a teljes görbe szakasz 10%-ra szokás korlátozni.

5.Keresztkovariancia és keresztkorreláció

$$\bar{x} = 0 \quad és \quad \bar{y} = 0$$

Az esetek többségében nem egy, hanem több EEG vagy más biológiai jelet figyelünk meg, és elemzünk egyidejűleg. Az ezek között fennálló kapcsolat jellemzésére többek között alkalmas az autokovarianciához és autokorrelációs függvényhez hasonlóan definiált keresztkovariancia és keresztkorrelációs függvény.

$$c_{xy}(\tau) = M[x(t) * y(t+\tau)]$$
$$feltéve,\ hogy \quad \bar{x} = 0 \quad és \quad \bar{y} = 0$$

Azért van értelme ebben az esetben is különböző időeltolások mellett meghatározni a kovariancia értékét, mert előfordulhat, hogy a kapcsolat csak bizonyos időbeli késleltetés mellett jelentkezik. Például az egyik vizsgált kéregterület hatást gyakorol a másikra, de a hatás odajutásához bizonyos időre van szükség. Vagy a két terület közös befolyás alatt áll, de ez az egyiket gyorsabban éri el. Természetesen, ez a két függvény nem szimmetrikus a 0 körül és így külön számolandó c_{xy} és c_{yx}. Ha a c_{xy} függvény adott τ érték mellett csúcsot mutat, akkor ez arra utal, hogy az *x(t)* folyamatban megfigyelt ampitúdóértéket τ idő elteltével hasonló követi *y(t)*-ben is. Viszont nem következik belőle, hogy az *y(t)*-ben megfigyelt értékek után τ-val *x(t)*-ben is hasonló ampitúdó található. A minimum érték, az autokovarianciához hasonlóan, az átlagtól ellenkező irányú eltérések jelentkezésére utal az adott késleltetés mellett.

6. Frekvencia analízis

Az autokovariancia vagy autokorrelációs függvény megadásával egyenértékű az EEG görbe statisztikai jellemzése szempontjaiból a teljesítményspektrum (power spectrum) számítása. Ennek lényege a görbe frekvencia összetételének elemzése és az egyes komponensek részarányának megállapítása. Maga az eljárás a frekvencia-összetétel leírásán kivül számos egyéb jellemző meghatározására is alkalmas, amelyek vagy magára a mintára, vagy más mintákkal való kapcsolatára vonatkoznak. A frekvencia analízis az EEG görbe elemzésének legelterjedtebben alkalmazott módszere. Ennek oka részben az említett sokoldalúsága, részben pedig az, hogy az EEG különböző normális és kóros állapotokban szabad szemmel is jól látható különbségeket mutat a frekvencia összetétel tekintetében. Ezek a különbségek sokkal könnyebben felismerhetők és kvantifikálhatók a teljesítmény spektrum birtokában.

A módszer az EEG analízis fegyvertárába a matematikából és fizikából került, ahol elterjedten alkalmazott eljárás, hogy zárt alakban, vagyis egyszerű képlet formájában nem megadható összefüggéseket jól kezelhető függvények összegével közelítenek, és ilyen formában tesznek hozzáférhetővé az analízis számára. Az egyik leggyakrabban alkalmazott eljárás különböző frekvenciájú trigonometrikus függvényeket használ időbeli összefüggések közelítésére. Ez a Fourier-analízis vagy Fourier-transzformáció. A módszer lényege azoknak az együtthatóknak a meghatározása, amelyekkel a függvényeket meg kell szorozni, hogy ezután összegezve azokat megkapjuk az eredeti összefüggést. Az együtthatókat a frekvencia függvényében ábrázolva a frekvencia spektrumot kapjuk. A transzformáció elnevezés arra utal, hogy az eredeti időfüggvényt frekvenciafüggvénnyé alakítjuk át.

A Fourier analízisnek három, egymással egyenértékű megfogalmazása lehetséges. Az összegzendő elemeket felírhatjuk különböző amplitúdójú és frekvenciájú koszinusz függvényék formájában, úgy hogy mindegyikhez még különböző értékű fázistolást rendelünk. Ez a meglehetősen nehezen kezelhető alak átalakítható úgy hogy minden elemét azonos frekvenciájú, de különböző ampitúdójú szinusz és koszinusz függvények összegével helyettesítjük. Igazolható ugyanis, hogy

$$C * \cos(\alpha + \varphi) = A * \cos(\alpha) + B * \sin(\alpha)$$

ahol

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \varphi = arctg\left(-\frac{B}{A}\right)$$

Végül ez utóbbi alak komplex függvény formájában is felírható, ahol a szinuszos tagok –√(–1) -el, vagyis –i -vel vannak szorozva. Mindezek alapján egy időfüggvény frekvencia tartományba való transzformálása tulajdonképpen mindig két frekvenciafüggvényt eredményez: egy amplitúdó és egy fázis spektrumot (*c(f)* és *φ(f)*), vagy két ampitúdó (koszinusz és szinusz) spektrumot (*A(f) és B(f)*). Utóbbi esetben szokás a spektrum valós és képzetes részéről is beszélni. *A*, *B*, *C*, és φ közötti kapcsolatokat a fentebb említett képletek adják meg.

Az együtthatók meghatározásának konkrét módja attól függ, hogy milyen jelet akarunk transzformálni.

1. A Fourier-integrál analízis egyszeri, nem periódikusan ismétlődő jelek (pl egyetlen négyszögimpulzus) leírására szolgál. A frekvenciafüggvények ebben az esetben folytonosak, vagyis minden frekvenciaértékhez tartozik együttható, illetve fázis érték és a jel létrehozásához végtelen sok elemet kell összeadni, vagyis integrálni.

2. A Fourier-soranalízis ezzel szemben *T* periódusidővel szabályosan ismétlődő jelek vizsgálatára alkalmas. Ebben az esetben integrálás helyett függvénysort kell összegezzünk, amelynek elemei az alapfrekvencia (*1/T*) felharmonikusainak, vagyis egészszámú többszöröseinek megfelelő frekvenciákkal (*1/T*, *2/T*, *3/T*....) rendelkeznek.

Az EEG görbe és az egyéb biológiai jelek tulajdonképpen egyik esetnek sem felelnek meg, de ha *T* hosszúságú szakaszt analizálunk, és feltételezzük, hogy ez a szakasz periódikusan ismétlődve építi fel az egész görbét, akkor alkalmazhatjuk a Fourier-sor analízist. Ez a feltételezés, bár természetesen nem helytálló, nem okoz különösebb problémát, hiszen az mindenféleképpen igaz, hogy a minta frekvenciaösszetétele és egyéb statisztikai jellemzői jó becslést adnak az egész véletlen folyamatra nézve. Tovább egyszerűsíti a helyzetet, hogy a mintavételezett görbe legnagyobb frekvenciájú összetevője, mint arról szó volt,

$$f_N = \frac{1}{2*\Delta t} = \frac{N/2}{T}$$

,tehát a Fourier-sor nem végtelen, hanem csak *N/2* elemet kell, hogy tartalmazzon. Megemlítendő, hogy ha más megközelítést alkalmazunk, és feltételezzük, hogy a vizsgált szakasz a teljes görbének és egy ablakfüggvénynek a szorzataként áll elő, pontosan ugyanerre az eredményre jutunk. Mindkét esetben szükség van azonban bizonyos korrekciókra, amit egyaránt magyarázhatunk a nem létező, *T* periódusidejű ismétlődés feltételezésének hatásával, vagy az ablakfüggvénnyel való szorzás torzításával. Ezt a korrekciót végezhetjük az elemzendő görbén, vagy az együtthatókat tartalmazó frekvencia spektrumokon, de a teljesítmény spektrumon már nem. Előbbi esetben a korrekció a vizsgált szakasz elejének és végének lesimítását jelenti a Tukey által 1967-ben leírt függvénnyel:

$$x'(t) = x(t) * \frac{1}{2} * \left(1 - \cos\left(\pi * \frac{t}{0{,}1 * T}\right)\right) \quad ha\ 0 < t < 0{,}1 * T \quad ,illetve$$

$$x'(t) = x(t) * \frac{1}{2} * \left(1 - \cos\left(\pi * \frac{T - t}{0{,}1 * T}\right)\right) \quad ha\ 0{,}9 * T < t < T$$

Utóbbi esetben a spektrumokat kell Hanning szűréssel végig simítani. Mindkét korrekció lényege a "leakage" nevű hiba kiküszöbölése, amely a szomszédos frekvenciapontok egymást torzító hatásában nyilvánul meg.

A Fourier analízis gyakorlati végrehajtásának első lépése az együtthatók meghatározása, vagyis a frekvenciaspektrumok kiszámítása. Ez egyszerűen úgy történik, hogy képezzük a minta és a megfelelő frekvenciájú koszinusz illetve szinusz függvény kovarianciáját, amely mint erről szó volt, azt méri, mennyi a közös jelleg, milyen mérvű a kapcsolat a vizsgált adatpárok között.

$$A_k = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^{N} x_i * \cos\left(2\pi k * \frac{r}{N}\right)$$
$$B_k = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^{N} x_i * \sin\left(2\pi k * \frac{r}{N}\right) \qquad ,ahol \;\; k = 1, 2, ...N/2$$

Az A_k és B_k együtthatók segítségével az eredeti minta reprodukálható:

$$x_i = \sum_{k=1}^{N/2}\left(A_k * \cos\left(2\pi k * \frac{i}{N}\right) + B_k * \sin\left(2\pi k * \frac{i}{N}\right)\right) \quad ,ahol \; i = 1, 2, ...N$$

A Fourier-sor együtthatóinak kiszámítása meglehetősen időigényes. Például, feltételezve, hogy az EEG jel 50Hz feletti komponenst nem tartalmaz 100Hz-el, vagyis 10 msec-enként mintavételezünk egy 10 sec-es szakaszt. Ez 1000 mérési pontot jelent, ami 500 koszinusz és 500 szinusz együttható számítását igényli. Éppen ezért igen nagy jelentőségű volt a gyors Fourier algoritmus (FFT – Fast Fourier Transformation) kidolgozása, amely azt a tényt használja ki, hogy a koszinusz és szinusz függvények periodikussága folytán az együtthatók számításánál gyakran kell ugyanazt a szorzatot képezni. Az algoritmus egyetlen kikötése, hogy N -nek 2 hatványának kell lennie, mert így határozható meg előre, hogy melyik $k*i/N$ értékek mellett kapunk azonos eredményt. A frekvenciatartományba történt transzformálás után különbözô függvények kiszámítására nyílik lehetőség.

<u>Teljesítmény spektrum</u>

A leggyakrabban használt frekvenciafüggvény, tulajdonképpen ez mutatja meg, hogy a különbözô frekvenciájú komponensek milyen mértékben, mekkora teljesítménnyel részesednek a vizsgált görbe létrehozásában. Szokás teljesítmény sűrűség spektrumnak is nevezni, de ez az elnevezés tulajdonképpen csak a folytonos spektrumnak a görbe alatti területtel, vagyis az összteljesítménnyel normalizált formájára vonatkozik. Kiszámításához az azonos frekvenciájú koszinusz és szinusz függvények együtthatóit egyaránt figyelembe kell venni.

$$S_k = A_k^{\ 2} + B_k^{\ 2} = C_k^{\ 2} \qquad k = 1, 2, ...N/2$$

ahol C_k a tisztán koszinusz segítségével felírt Fourier-sor együtthatóit jelenti.

A teljesítmény spektrum előállításának alternatív módja az autokovariancia függvény Fourier transzformációja. Ezt a megoldást igen gyakran használták a FFT algoritmus leírása előtt.

Abszolút érték vagy amlitúdóspektrum

A teljesítmény spektrumhoz hasonlóan az egyes frekvencia komponensek relatív súlyát mutatja. A különbség az, hogy ezek az értékek az amplitúdóval és nem az intenzitással függnek össze.

$$|C_k| = \sqrt{A_k^{\ 2} + B_k^{\ 2}}$$

Fázis spektrum

A különböző frekvencia komponensek egymáshoz viszonyított fázishelyzetét adja meg. Azonos a tisztán koszinusz sorként felírt Fourier-sor egyes elemeihez tartozó fázisszögekkel.

$$\varphi_k = arctg\left(-\frac{B_k}{A_k}\right)$$

Keresztspektrum

Abban az esetben, ha két EEG görbét regisztrálunk párhuzamosan, akkor ezek kapcsolatát sokkal hatékonyabban vizsgálhatjuk a Fourier-analízis keretei között, mint egyszerűen a keresztkovariancia vagy keresztkorrelációs függvény kiszámításával. A keresztspektrum a két jel közötti összefüggést a frekvencia függvényben adta meg.

Ha például a két EEG görbében szerepel egy közös frekvenciakomponens (pl. az α-tartományban), és emellett mindkettő tartalmaz egymástól független, zaj jellegű háttér aktivitást, akkor a keresztspektrum a közös frekvenciának megfelelő tartományban nagy lesz, a többi helyen viszont alacsonyabb értéket mutat. A függvény kiszámításához célszerű a Fourier spektrum komplex alakban felírt változatát használni, ez ugyanis igen egyszerűen szolgáltatja a kívánt végeredményt. A keresztspektrum képzéséhez az egyik jel komplex alakban felírt spektrumát pontonként szorozni kell a másik jel spektrumának konjugáltjával (az "a – i∗b" komplex szám konjugáltja "a + i∗b"). Ennek megfelelően tehát, mivel a komplex formában a szinuszos tagok együtthatói –√–1 -el vagyis –i -vel vannak szorozva:

$$S_{xy\,k} = \left(A_{x_k} - i * B_{x_k}\right) * \left(A_{y_k} - i * B_{y_k}\right) =$$
$$\underbrace{A_{x_k} * A_{y_k} + B_{x_k} * B_{y_k}}_{\text{valós rész}} + i * \underbrace{\left(A_{x_k} * B_{y_k} - A_{y_k} * B_{x_k}\right)}_{\text{képzetes rész}}$$

$$C_{xy_k}\ \textit{kospektrum} \qquad Q_{xy_k}\ \textit{quadspektrum}$$

A keresztspektrum tehát egy valós és egy képzetes részből áll, tehát komplex frekvencia függvény. Ha az egy görbére vonatkozó teljesítmény spektrumot ugyancsak a komplex alak felhasználásával akarjuk kiszámítani, akkor a képzetes rész 0 lesz, a valós rész pedig $A_k^2 + B_k^2$, ahogy erről ott szó volt, hiszen $A_x = A_y$, valamint $B_x = B_y$ A keresztspektrum abszolút értékének és fázis spektrumának meghatározásához itt az egyazon frekvenciához tartozó kospektrum és quadspektrum elemeket egyaránt figyelembe kell venni. A keresztspektrum abszolút értéke, ami megfelel a teljesítmény spektrumnak:

$$\left|S_{xy_k}\right| = \sqrt{C_{xy_k}{}^2 + Q_{xy_k}{}^2}$$

Kereszt fázis spektrum

$$\varphi_{xy_k} = arctg\left(\frac{Q_{xy_k}}{C_{xy_k}}\right)$$

A kereszt fázis spektrum $x = y$ esetben nincs értelmezve, hiszen ennek a jelentése az, hogy a két görbében lévő közös összetevők fázisviszonya milyen. Ha $x = y$, akkor nyilvánvalóan minden komponens 0 fáziseltolással jelentkezik. Ez abból is látható, hogy $Q_{xx} = 0$, tehát φ_{xx} = arctg = 0 minden k-ra nézve.

Látható tehát, hogy míg a keresztkovariancia csak a kapcsolat meglétére és bizonyos fokig időbeli viszonyára utal, addig a keresztspektrum abszolút értékéből és fázis spektrumából megtudjuk azt is, hogy ez milyen frekvencia tartományban áll fenn, és milyen esetleges fáziseltolás mellett érvényesül.

Megjegyzendő, hogy akárcsak a teljesítmény spektrum esetében láttuk a keresztspektrum is előállítható a megfelelő kovariancia (itt a keresztkovariancia, ott az autokovariancia) függvény Fourier transzformációjával. A Fourier spektrum közvetlenül szolgáltatja a kospektrumot is a quadspektrumot. Az FFT algoritmus leírása előtt ez volt az útja a keresztspektrum előállításának, ma inkább abból kiindulva, inverz Fourier transzformációval számolják a keresztkovarianciát.

Koherencia

A keresztspektrum abszolút értékével egyetlen probléma az, hogy a kovarianciához hasonlóan nemcsak a kapcsolat erőssége befolyásolja nagyságát. Értéke akkor is nagy lesz, ha a két spektrum valamelyikének teljesítménye magas a vizsgált frekvencia tartományban. A koherencia függvény a korrelációs együtthatóhoz, vagy a korrelációs függvényekhez hasonlóan normalizált, nagysága 0 és 1 között változhat. Ha a két jel megegyezik ($x = y$), akkor 1, ha teljesen független,

$$COH_{xy_k} = \frac{\left|S_{xy_k}\right|^2}{S_{xx_k} * S_{yy_k}}$$

akkor 0 értéket vesz fel. Amennyiben a kapcsolat csak bizonyos frekvenciatartományban létezik, akkor itt 1 körüli értéket, másutt 0-t kapunk:

Autoregresszió

Az EEG analízis viszonylag új lehetősége az autoregressziós modell alkalmazása. Ez a jelnek éppen azt a tulajdonságát használja ki, hogy egymást követő pontjaiban az amplitúdóértékek nem függetlenek egymástól. Az autokovariancia és az autokorrelációs függvény, valamint a teljesítmény spektrum a függőség leírására szolgált. Az autoregresszión alapuló analízis viszont csak felhasználja a függőséget az analízis céljára.

A többváltozás lineáris regresszió fogalmán azt értjük, hogy egy változó értékét más változók értékeiből próbáljuk közelíteni, olyan módon, hogy azokat különböző regressziós együtthatókkal szorozva összeadjuk. Ennek speciális formája az autoregresszió, ahol ugyanannak a változónak korábbi értékeiből próbáljuk pillanatnyi nagyságát megbecsülni.

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} a_m * x_{i-m} + e_i$$

ahol a_m az m-ik regressziós együttható

e_i a hibafüggvény, vagyis a tényleges és a becsült érték különbsége a vizsgált i-ik pontban.

Az autokovariancia pontosan azt mondja meg, hogy egymástól adott időbeli távolságra lévő két érték között milyen mértékű a kapcsolat. Ezért nem meglepő, hogy a regressziós koefficiensek optimális értékeit, amelyek mellett a hibafüggvény minimális, az autokovariancia függvényből kiindulva lehet meghatározni. Az m értékét, vagyis azt, hogy hány koefficienst keresünk, hány korábbi érték alapján kívánjuk becsülni a pillanatnyi értéket, az autoregressziós modell fokszámának nevezzük. Feltételezve a vizsgált mintaszakasz stacionaritását, a kiszámított együtthatóknak minden pontban jó becslést kell adniuk. A modell egyik felhasználási lehetősége éppen ebben rejlik: az együtthatók meghatározása után minden pontban meghatározzuk a hibafüggvényt. Ha ennek értéke valahol egy lesz, ott a stacionaritás feltétele nem áll. Ily módon artefaktumok, speciális hullámformák (pl. tüske-hullám komplexum) kikereshetők a görbéből. Hasonló módon jelzi a hibafüggvény a domináns frekvencia megváltozását pl. alfa-orsók megjelenését, vagy az alvási állapotok közötti átmenetet stb.